Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación
CI–2511 Lógica Simbólica
Enero-Marzo 2013

Práctica 8

1. Evalúe la función $ocurrelibre('v','e')$ para las siguientes instancias de v y e:
   a) $\neg ocurrelibre('i','i')$
   b) $\neg ocurrelibre('i','j')$
   c) $\neg ocurrelibre('i','i,j')$
   d) $\neg ocurrelibre('i','i+j')$
   e) $\neg ocurrelibre('x','(\exists y \mid: (\forall z \mid P(y,y) : x \equiv y) \equiv (x \equiv y) \wedge (y \equiv z))')$
   f) $\neg ocurrelibre('y','(\exists y \mid: (\forall z \mid P(y,y) : x \equiv y) \equiv (x \equiv y) \wedge (y \equiv z))')$
   g) $\neg ocurrelibre('z','(\exists y \mid: (\forall z \mid P(y,y) : x \equiv y) \equiv (x \equiv y) \wedge (y \equiv z))')$
   h) $\neg ocurrelibre('x','(\exists x \mid R(x,z) : \neg(P(x,z) \vee Q(x)))')$
   i) $\neg ocurrelibre('z','(\exists x \mid R(x,z) : \neg(P(x,z) \vee Q(x)))')$
   j) $\neg ocurrelibre('y','(\exists x \mid R(x,z) : \neg(P(x,z) \vee Q(x)))')$

2. Realice las siguientes sustituciones textuales. Cuando sea necesario, utilice una variable fresca antes de realizar la sustitución.
   a) $(\sum x \mid 0x + r < n : x + v)[v := 3]$
   b) $(\sum x \mid 0x + r < n : x + v)[x := 3]$
   c) $(\sum x \mid 0x + r < n : x + v)[n := n + x]$
   d) $(\sum x \mid 0 \leq x < r : (\sum y \mid 0 \leq y : x + y + n))[n := x + y]$
   e) $(\sum x \mid 0 \leq x < r : (\sum y \mid 0 \leq y : x + y + n))[r := y]$
   f) $((\forall x \mid R(x,y) \wedge P(x) : Q(x)) \equiv \neg((\forall x \mid R(x,y) : \neg Q(x)) \vee (\forall x \mid P(x) : \neg Q(x))))[y := f(x,y,z)]$
   g) $((\exists x \mid R(x,y,z) \vee P(x) : Q(x)) \equiv \neg((\forall x \mid R(x,z,z) : \neg Q(x)) \wedge (\forall x \mid P(x) : \neg Q(x))))[z := h(z)]$
   h) $((\exists x \mid R(x,y) \wedge P(x) : Q(x,y)) \Rightarrow (\exists x,y \mid R(y,y) : Q(x,y)) \wedge (\exists x \mid P(x) : Q(x,y)))[y := f(z,z)]$

Usando las siguientes propiedades para la manipulación de rangos (teoremas de aritmética de rangos):

Para la aritmética de números enteros $(x, y : \mathbb{Z})$:

- (0a) $x \leq y \leq z \equiv x \leq y \wedge y \leq z$
- (0b) $x < y \leq z \equiv x < y \wedge y \leq z$
- (0c) $x \leq y < z \equiv x \leq y \wedge y < z$
- (0d) $x < y < z \equiv x < y \wedge y < z$
- (i) $x \leq y \equiv x < y + 1$
- (ii) $x \leq y \equiv x - 1 < y$
- (iii) $x \leq y \equiv x < y \vee x = y$

y usando los siguientes teoremas de números enteros:

- (15.3) $a + 0 = a$
- (15.13) $a + (-a) = 0$
- (15.14) $a - b = a + (-b)$

3. Demueste los teoremas que se presentan a continuación:

   a) $a \leq b \Rightarrow (a \leq i < b + 1 \equiv a \leq i < b \vee i = b)$ (para $a, b : \mathbb{Z}$)

   b) $a \leq b \Rightarrow (a \leq i < b + 1 \equiv a + 1 \leq i < b + 1 \vee i = a)$ (para $a, b : \mathbb{Z}$)

4. Utilice los teoremas anteriores para demostrar las reglas de separación de un término de una cuantificación.

5 Demostrar:

$(\sum i \mid 20 \leq i < 30 : 7^{i+5}) = (\sum i \mid 25 \leq i < 35 : 7^{i})$

6. Demostrar:

$(\prod i | 5 \leq i \leq 15 : i^2 + 6i + 9) * (\prod i | 0 \leq i \leq 10 : (i + 8)^2) = (\prod i | 0 \leq i \leq 10 : (i + 8)^4)$